Problema 9.2.13.

Utilizând metoda tabelelor semantice (construind arborele binar), demonstraţi:

1. |– (∀*x*)*P*(*x*) ∧ ((∀*x*)*P*(*x*) ∨ (∀*x*)*Q*(*x*)) ↔ (∀*x*)*P*(*x*)

Metoda tabelelor semantice este o metodă semantică și prin respingere (vom porni de la negație)

**Teorema de corectitudine și completitudine** |=*U* dacă și numai dacă ¬*U* are asociată o tabelă semantică închisă.

*U* = *U*1↔ *U*2

Varianta1: se înlocuiește echivalența cu o formulă echivalentă

Varianta2: se iau pe rând implicațiile *U*1→ *U*2 respectiv *U*2→ *U*1 și se demonstrează individual

Vom folosi varianta 2, deci,

|– *U* dacă și numai dacă atât |– *U*1→ *U*2 cât și |– *U*2→ *U*1

I. Verificăm că |– *U*1→ *U*2

¬ ((∀*x*)*P*(*x*) ∧ ((∀*x*)*P*(*x*) ∨ (∀*x*)*Q*(*x*)) → (∀*x*)*P*(*x*)) (1) √

| α (1)

(∀*x*)*P*(*x*) ∧ ((∀*x*)*P*(*x*) ∨ (∀*x*)*Q*(*x*)) (2) √

|

¬ (∀*x*)*P*(*x*) (3) √

| α (1)

(∀*x*)*P*(*x*) (4) √

|

(∀*x*)*P*(*x*) ∨ (∀*x*)*Q*(*x*) (5) √

| δ (3) *a* constantă nouă

¬ *P*(*a*)

| γ (4) *a* constantă existentă

*P*(*a*)

|

(∀*x*)*P*(*x*) (4’)

⊗

Tabela semantică este închisă, deci (din TCC) |= *U*1→ *U*2  deci și |– *U*1→ *U*2 (1)

II. Verificăm că |– *U*2→ *U*1

¬((∀*x*)*P*(*x*) → (∀*x*)*P*(*x*) ∧ ((∀*x*)*P*(*x*) ∨ (∀*x*)*Q*(*x*)) ) (1) √

| α (1)

(∀*x*)*P*(*x*) (2)

|

¬ ((∀*x*)*P*(*x*) ∧ ((∀*x*)*P*(*x*) ∨ (∀*x*)*Q*(*x*))) (3) √

/ \ β (3)

¬ (∀*x*)*P*(*x*) (4) ¬ ((∀*x*)*P*(*x*) ∨ (∀*x*)*Q*(*x*)) (5) √

⊗ | α (5)

¬ (∀*x*)*P*(*x*) (6)

|

¬ (∀*x*)*Q*(*x*) (7)

⊗

Tabela semantică este închisă, deci (din TCC) |= *U*2→ *U*1  deci și |– *U*2→ *U*1 (2)

Din (1) și (2) ⇒ |– *U*, deci |– (∀*x*)*P*(*x*) ∧ ((∀*x*)*P*(*x*) ∨ (∀*x*)*Q*(*x*)) ↔ (∀*x*)*P*(*x*)

Problema 9.2.14.

Utilizând metoda tabelelor semantice (construind arborele binar), verificaţi dacă au loc:

1. |– (∃*y*)( ∃*x*)*P*(*x*,*y*) ↔ ( ∃*x*)(∀*y*)*P*(*x*,*y*)

Metoda tabelelor semantice este o metodă semantică și prin respingere (vom porni de la negație)

**Teorema de corectitudine și completitudine** |=*U* dacă și numai dacă ¬*U* are asociată o tabelă semantică închisă.

*U* = *U*1↔ *U*2

Varianta1: se înlocuiește echivalența cu o formulă echivalentă

Varianta2: se iau pe rând implicațiile ***U*1→ *U*2** respectiv *U*2→ *U*1 și se demonstrează individual

I. Verificăm că |– *U*1→ *U*2

¬ ((∃*y*)( ∃*x*)*P*(*x*,*y*) → ( ∃*x*)(∀*y*)*P*(*x*,*y*)) (1) √

| α (1)

(∃*y*)( ∃*x*)*P*(*x*,*y*) (2) √

|

¬ ( ∃*x*)(∀*y*)*P*(*x*,*y*) (3) √

| δ (2) *a* constantă nouă

( ∃*x*)*P*(*x*,*a*) (4) √

| δ (4) *b* constantă nouă

*P*(*b*,*a*)

| γ (3) *a*,*b* constante existente

¬ (∀*y*)*P*(*a*,*y*) (5) √

|

¬ (∀*y*)*P*(*b*,*y*) (6) √

|

¬ ( ∃*x*)(∀*y*)*P*(*x*,*y*) (3’) √

| δ (5) *c* constantă nouă

¬ *P*(*a*,*c*)

| δ (6) *d* constantă nouă

¬ *P*(*b*,*d*)

| γ (3’) *~~a~~*~~,~~*~~b~~*,*c*,*d* constante existente

¬ (∀*y*)*P*(*c*,*y*) (7)

|

¬ (∀*y*)*P*(*d*,*y*) (8)

|

¬ ( ∃*x*)(∀*y*)*P*(*x*,*y*) (3”)

Ciclu infinit ⇒ nu putem decide tipul formulei *U*1→ *U*2, deci nu putem decide nici tipul formulei *U*1↔ *U*2.